چهارشنبه
۱۴۰۴/۰۱/۱۳

مشتق و کاربرد مشتق +
فصل ۲ گسسته + فصل ۱ هندسه دوازدهم

دفترچه پاسخ

دوپینگ ماز

گروه آزمایشی علوم ریاضی و فنی
ریاضیات

درس	مسئول درس	طراحان	ویراستاران
ریاضیات	حسین شفیع‌زاده محدثه شیخعلی مهرداد کیوان	محمد خانگلدی ـ کیوان دارابی	فرشاد حسن‌زاده ارسلان حسنوند ـ سجاد احمدی فؤاد خیرآبادی

هفته اول	هفته دوم	هفته سوم	هفته چهارم	هفته پنجم	هفته ششم
مباحث پایه	جامع تابع + توابع نمایی و لگاریتمی	جامع مثلثات	جامع حد و پیوستگی + مشتق و کاربرد مشتق	-	الگو و دنباله + توان‌های گویا و عبارت‌های جبری

۵۵ روز جمع‌بندی تا کنکور اردیبهشت

دانش آموزان عزیز ماز

امیدواریم از آزمون امروزتون لذت برده باشین.

اهمیت مشتق و کاربردش!

مشتق تعریف حدیه شیب خطه! یادتونه شیب خط چی بود؟! آره همون اختلاف‌ها بر اختلاف‌هاست.

مشتق شکل حدیشه که تو این حالت یکی از نقاط رو به دیگری نزدیک می‌کنیم و شیب رو حساب می‌کنیم، اینجوری این شیب دقیقاً همون شیب خط مماس میشه و به مشتق، شیب خط مماس هم میگن.

مشتق آنقدر کاربردی و مهمه که تقریباً تو همه مسائل زندگی مثل بهینه کردن همه مسائل (بهینه کردن سود یه مغازه یا شرکت)، میزان تغییرات یه کمیت (میزان تغییرات سرعت یه خودرو) و غیره و غیره استفاده میشه.

همچنین توی این بخش یاد می‌گیریم روند حرکت یه تابع رو بررسی کنیم (یکنوایی)، بیشترین یا کمترین مقدار ممکن یه تابع رو به دست بیاریم (اکسترمم) و کاری کنیم این بیشترین و کمترین تو یه مساله پیش بیاد (بهینه‌سازی).

پیش‌نیازهای مطالعه این بخش کدام مباحث هستند؟

برای یادگیری بهتر این بخش باید یه مرور روی بخش تابع، حد و مثلثات داشته باشید. چون مشتق تقریباً به تحلیل و بررسی این موضوعات می‌پردازد.

البته بخش کاربرد مشتق رو میشه گفت ترکیب مشتق و معادله ـ نامعادله است، پس برای یادگیری کاربرد مشتق قطعا نیاز به تسلط کامل روی معادله نامعادله نیز دارید.

این بخش در کدام قسمت‌ها کاربرد دارد؟

برای یادگیری فصل کاربرد مشتق باید حتماً روی مشتق تسلط زیادی داشته باشید. البته در فیزیک دوازدهم (سینماتیک) نیز به شدت کاراست.

می‌تونیم بگیم توی کتاب ریاضیات شما کاربرد مشتق آخرین سطح از ریاضیاته که تو هیچ بخش دیگه‌ای کاربرد نداره اما برای یادگیریش باید روی همه بخش‌ها تسلط داشت.

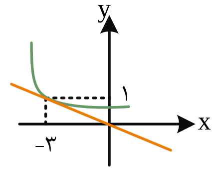
از این بخش‌ها در کنکور سال‌های قبل چه تعداد سوال طرح شده است؟ این سوالات از چه موضوعاتی بوده است

کنکور سراسری	۱۴۰۰	۱۴۰۱	۱۴۰۲ نوبت اول	۱۴۰۲ نوبت دوم	۱۴۰۳ نوبت اول	۱۴۰۳ نوبت دوم
تعداد سوال	۶	۴	۳	۳	۲	۱
مباحث مطرح شده در سوال	مشتق و قضیه تقسیم خط مماس بر منحنی مشتق و حد مثلثاتی یکنوایی و اکسترمم نسبی یکنوایی اکسترمم نسبی	خط مماس بر منحنی مشتق ترکیب توابع تعریف مشتق اکسترمم نسبی	نقاط بحرانی نیم‌مماس چپ و راست اکسترمم مطلق (ترکیب با فصل ۱ حسابان ۱)	خط مماس بر منحنی نقطه عطف اکسترمم مطلق	خط مماس بر منحنی در نقطه عطف یکنوایی	نقاط بحرانی و اکسترمم نسبی

حالا برین تحلیل آزمون رو شروع کنین که به‌نظرم **تحلیل** آزمون و مشخص شدن ایرادها از خود آزمون دادن مهم‌تره. آرزومند آرزوهایتان...

حسین شفیع‌زاده - رتبهٔ ۶ کنکور ۶۷ و مسئول درس ریاضی آزمون ماز

۱- در شکل مقابل، نمودار f و خط مماس بر آن در نقطهٔ $(-3,1)$ رسم شده است. حاصل $\lim_{x\to -3}\frac{f(x)-a}{x+3}$ در صورت وجود چقدر از a کمتر است؟



۱) $\frac{1}{3}$

۲) $\frac{4}{3}$

۳) ۳

۴) $\frac{2}{3}$

پاسخ: گزینه ۲ (آسان ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۴۰۴)

خط مماس از نقاط $(-3,1)$ و $(0,0)$ عبور می‌کند، بنابراین شیب خط مماس $m=\frac{1-0}{-3-0}=-\frac{1}{3}$ است.

$\lim_{x\to -3}\frac{f(x)-a}{x+3}$ همان $f'(-3)$ و برابر شیب خط مماس یعنی $-\frac{1}{3}$ می‌باشد. از طرفی باید $a=f(-3)$ باشد، پس $a=1$ و حاصل حد به اندازه $\frac{4}{3}$ از a کمتر است.

مشتق

تعریف: تابع f که در همسایگی نقطه $x=a$ تعریف شده است را در نظر می‌گیریم. به حد زیر در صورت وجود، **مشتق** تابع f در نقطهٔ a گفته می‌شود و با نماد $f'(a)$ نمایش می‌دهیم:

تعریف مشتق: $$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

مشتق راست: $$f'_+(a)=\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

مشتق چپ: $$f'_-(a)=\lim_{x\to a^-}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

بیان تعریف مشتق با ظاهری دیگر:

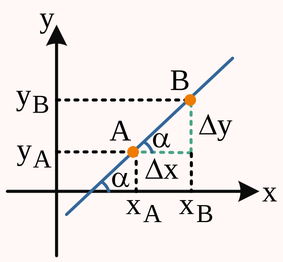
تعریف دوم مشتق: $$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

مشتق راست: $$f'_+(x)=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

مشتق چپ: $$f'_-(x)=\lim_{h\to 0^-}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

یادآوری از شیب خط

اگر خطی از دو نقطه $A(x_A,y_A)$ و $B(x_B,y_B)$ عبور کند، می‌توانیم **شیب** آن خط را با استفاده از رابطه زیر پیدا کنیم:



$$\text{شیب خط}=m=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}$$

حال اگر زاویه بین یک خط با جهت مثبت محور xها معلوم باشد، می‌توانیم شیب آن خط را با استفاده از رابطه زیر به دست بیاوریم:

$$\text{شیب خط}=m=\tan\alpha$$

$\alpha=$ زاویه خط با جهت مثبت محور xها

۲- اگر $\frac{۱}{۳}=\lim\limits_{h\to ۰}\frac{f(۳+h)-f(۳)}{h}$ و $g(x)=۲\sqrt{x}+\sqrt[۳]{x}$ باشد، حاصل $(fog)'(۱)$ چقدر است؟

۱) $\frac{۵}{۱۸}$ ۲) $\frac{۵}{۶}$ ۳) $\frac{۵}{۱۲}$ ۴) $\frac{۴}{۹}$

پاسخ: گزینه ۴ (متوسط ـ محاسباتی ـ ۱۴۰۴)

می‌دانیم: $\lim\limits_{h\to ۰}\frac{f(۳+h)-f(۳)}{h}=\frac{۱}{۳}\Rightarrow f'(۳)=\frac{۱}{۳}$

از طرفی: $(fog)'(۱)=g'(۱)f'(g(۱))=g'(۱)f'(۳)=\frac{۱}{۳}g'(۱)$

خواهیم داشت: $g(x)=۲\sqrt{x}+\sqrt[۳]{x}\Rightarrow g'(x)=\frac{۲}{۲\sqrt{x}}+\frac{۱}{۳\sqrt[۳]{x^۲}}\Rightarrow g'(۱)=۱+\frac{۱}{۳}=\frac{۴}{۳}$

در نتیجه: $(fog)'(۱)=\frac{۱}{۳}\times\frac{۴}{۳}=\frac{۴}{۹}$

مشتق تابع رادیکالی

اگر $f(x)=\sqrt[n]{x^m}$ باشد، آن‌گاه داریم:

$$(*)f(x)=\sqrt[n]{x^m}=x^{\frac{m}{n}}\Rightarrow f'(x)=\frac{m}{n}\times x^{\frac{m}{n}-۱}=\frac{m}{n}x^{\frac{m-n}{n}}=\frac{m}{n\times x^{\frac{n-m}{n}}}=\frac{m}{n\sqrt[n]{x^{n-m}}}$$

به عبارت دیگر:

$$f(x)=\sqrt[n]{x^m}\Rightarrow f'(x)=\frac{m}{n\sqrt[n]{x^{n-m}}}$$

به عنوان مثال:

$$f(x)=\sqrt{x}\xrightarrow[n=۲]{m=۱}f'(x)=\frac{۱}{۲\sqrt{x}}$$

۳- آهنگ تغییر متوسط تابع $f(x)=x^۳+۳x^۲$ در بازهٔ $[a,۰]$ با آهنگ تغییر لحظه‌ای در نقطه $x=a$ برابر است. مقدار a کدام است؟

۱) $-\frac{۱}{۲}$ ۲) $-\frac{۱}{۳}$ ۳) $-\frac{۲}{۳}$ ۴) $-\frac{۳}{۲}$

پاسخ: گزینه ۴ (متوسط ـ محاسباتی ـ ۱۴۰۴)

آهنگ متوسط تابع $f(x)=x^۳+۳x^۲$ در بازهٔ $[a,۰]$ برابر است با:

$$\bar{f}=\frac{f(۰)-f(a)}{۰-a}\Rightarrow\frac{a^۳+۳a^۲}{a}=a^۲+۳a$$

آهنگ لحظه‌ای در نقطهٔ a همان $f'(a)$است.

$$f'(a)=۳a^۲+۶a\Rightarrow a^۲+۳a=۳a^۲+۶a$$

$$\Rightarrow ۲a^۲=-۳a\Rightarrow a=-\frac{۳}{۲}$$

مشتق تابع چندجمله‌ای

اگر $n\in\mathbb{Q}$ و $f(x)=x^n$ باشد، آن‌گاه $f'(x)=nx^{n-1}$ است.

توجه:
اگر عددی در یک تابع ضرب شود، برای مشتق‌گیری، ابتدا ضریب عددی را کنار گذاشته و عمل مشتق را انجام می‌دهیم. سپس آن ضریب را در تابع مشتق ضرب می‌کنیم. به عبارت دیگر، اگر f تابعی مشتق‌پذیر و $k\in\mathbb{R}$ باشد، داریم:

$$y=kf(x)\Rightarrow y'=kf'(x)$$

به عنوان مثال:

$$f(x)=3x^4\Rightarrow f'(x)=3(4x^3)=12x^3$$

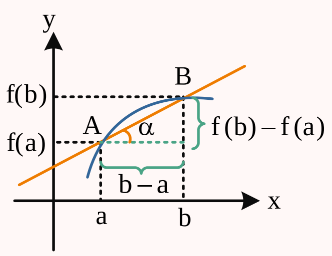
$$g(x)=2x^{-3}\Rightarrow g'(x)=2(-3x^{-4})=-6x^{-4}$$

$$h(x)=x^{\frac{2}{3}}\Rightarrow h'(x)=\frac{2}{3}x^{\frac{2}{3}-1}=\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}=\frac{2}{3}\times\frac{1}{x^{\frac{1}{3}}}=\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$$

$$k(x)=\frac{1}{x^5}\Rightarrow k(x)=x^{-5}\Rightarrow k'(x)=-5x^{-6}$$

آهنگ متوسط تغییر

با توجه به شکل زیر، می‌توان گفت که **آهنگ متوسط تغییر** تابع f، با شیب خطی که دو نقطه A و B را به هم وصل می‌کند (شیب خط قاطع یا شیب خط واصل) برابر است.



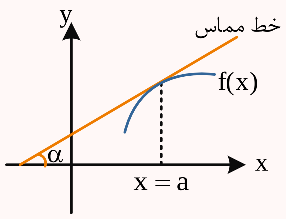
$$\text{شیب خط قاطع}=\tan\alpha=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

بنابراین آهنگ متوسط تغییر تابع f در بازه $[a,b]$ برابر است با:

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

آهنگ لحظه‌ای تغییر (آهنگ آنی تغییر)

آهنگ لحظه‌ای تغییر تابع f در $x=a$ بنا به تعبیر هندسی، با شیب خط مماس بر نمودار تابع f در آن نقطه برابر است و از طرفی می‌دانیم که شیب خط مماس در نقطه $x=a$ با مقدار مشتق تابع در آن نقطه برابر است، پس مطابق شکل زیر داریم:



آهنگ لحظه‌ای تغییر تابع f در $x=a$ = شیب خط مماس $=\tan\alpha=f'(a)$

بنابراین آهنگ لحظه‌ای تغییر تابع f در نقطه $x=a$ برابر است با: $f'(a)$

گروه آموزشی ماز

۴- در تابع $f(x)=ax+\frac{4}{\sqrt{x}}$، اگر $f(1)+f'(1)=10$ باشد، $f''(1)$ چقدر است؟

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ: گزینه ۳ (متوسط - محاسباتی - ۱۴۰۴)

تابع f' را می‌نویسیم:

$$f'(x)=a+\frac{(-\frac{1}{2\sqrt{x}})(4)}{x}=a-\frac{2}{x\sqrt{x}}\Rightarrow f'(1)=a-2$$

از طرفی:

$$f(1)=a+4$$

بنابراین: $f(1)+f'(1)=10 \Rightarrow a+4+a-2=10 \Rightarrow a=4$

خواهیم داشت: $f'(x)=4-2x^{-\frac{3}{2}} \Rightarrow f''(x)=-2\left(-\frac{3}{2}\right)x^{-\frac{5}{2}}=3x^{-\frac{5}{2}} \Rightarrow f''(1)=3$

مشتق مرتبه دوم چیه دیگه!

حال اگر بخواهیم مشتق مرتبه دوم تابع f، در نقطه $x=a$ را به کمک تعریف مشتق بیان کنیم، داریم:

$$f''(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f'(a+h)-f'(a)}{h}$$

مشتق تقسیم دو تابع

$$y=\left(\frac{f}{g}\right)(x) \Rightarrow y'=\frac{\underset{\text{مشتق صورت}}{f'(x)}\ \underset{\text{مخرج}}{g(x)}-\underset{\text{مشتق مخرج}}{g'(x)}\ \underset{\text{صورت}}{f(x)}}{\underset{(\text{مخرج})^2}{(g(x))^2}}\ ,\ g(x)\neq 0$$

به عنوان مثال:

$$y=\frac{5-3x}{x^3+1} \Rightarrow y'=\frac{\underbrace{(-3)}_{\text{مشتق صورت}}\underbrace{(x^3+1)}_{\text{مخرج}}-\underbrace{(3x^2)}_{\text{مشتق مخرج}}\underbrace{(5-3x)}_{\text{صورت}}}{\underbrace{(x^3+1)^2}_{(\text{مخرج})^2}}$$

گروه آموزشی ماز

۵- در تابع $f(x)=(x^2+ax+b)[x]$ رابطهٔ $f'_+(1)-f'_-(1)=5$ برقرار است. $f'(\frac{5}{2})$ چقدر است؟

۱) ۱۶ ۲) ۱۵ ۳) ۱۴ ۴) ۱۳

پاسخ: گزینه ۱ (سخت ـ محاسباتی ـ ۱۴۰۴)

روش اول:

تابع f باید در $x=1$ پیوسته باشد، بنابراین:

$$\begin{cases}\lim_{x\to 1^+} f(x)=f(1)=(1+a+b)\times 1=a+b+1\\ \lim_{x\to 1^-} f(x)=(1+a+b)\times 0=0\end{cases} \Rightarrow a+b+1=0 \quad (1)$$

از طرفی:

$$\begin{cases}\xrightarrow{0\le x<1} f(x)=0 \Rightarrow f'(x)=0 \Rightarrow f'_-(1)=0\\ \xrightarrow{1\le x<2} f(x)=x^2+ax+b \Rightarrow f'(x)=2x+a \Rightarrow f'_+(1)=2+a\end{cases}$$

$$f'_+(1)-f'_-(1)=5 \Rightarrow 2+a=5 \Rightarrow a=3 \xrightarrow{(1)} b=-4$$

خواهیم داشت:

$$f(x)=(x^2+3x-4)[x] \xrightarrow{\text{در همسایگی } \frac{5}{2}} f(x)=2(x^2+3x-4) \Rightarrow f'(x)=2(2x+3) \Rightarrow f'(\frac{5}{2})=16$$

روش دوم:

$x=1$ باید ریشهٔ $x^2+ax+b=0$ باشد تا f در $x=1$ پیوسته باشد.

$$f(x)=(x-1)(x-b)[x] \Rightarrow \begin{cases}f'_+(1)=1\times(1-b)\times 1=1-b\\ f'_-(1)=1\times(1-b)\times 0=0\end{cases}$$

$$f'_+(1)-f'_-(1)=1-b=5 \Rightarrow b=-4$$

$$x^2+ax+b=(x-1)(x-b)=(x-1)(x+4)=x^2+3x-4 \Rightarrow a=3$$

ادامه راه‌حل مانند روش اول است.

گروه آموزشی ماز

۶- اگر $f(x)=\dfrac{\sin x+a\cos^۳ x}{\cos^۲ x}$ و $g(x)=(\sin x)(۱+\tan^۲ x)$ و $f'(\frac{\pi}{۶})-g'(\frac{\pi}{۶})=۱$ باشد، a کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۱- ۳) ۲ ۴) ۲-

پاسخ: گزینه ۴ (متوسط ـ محاسباتی ـ ۱۴۰۴)

ابتدا تابع $f-g$ را ساده می‌کنیم:

$$g(x)=\sin x(۱+\tan^۲ x)=\frac{\sin x}{\cos^۲ x}$$

$$\Rightarrow f-g=\frac{\sin x+a\cos^۳ x}{\cos^۲ x}-\frac{\sin x}{\cos^۲ x}=\frac{a\cos^۳ x}{\cos^۲ x}=a\cos x$$

خواهیم داشت:

$$(f-g)'(x)=-a\sin x\Rightarrow f'(\frac{\pi}{۶})-g'(\frac{\pi}{۶})=(f-g)'(\frac{\pi}{۶})=-a\sin\frac{\pi}{۶}=-\frac{a}{۲}=۱\Rightarrow a=-۲$$

تو این سوالات مشتق، باید دنده عقب بریم!

در بعضی از سوالات عبارتی با ظاهر نسبتاً پیچیده را به ما می‌دهند و حاصل آن را از ما می‌پرسند، در این گونه موارد معمولاً با طرف دوم مشتق مجموع، تفاضل، حاصل‌ضرب و تقسیم دو تابع و یا با طرف دوم مشتق ترکیب توابع مواجهیم که در ادامه چند نمونه مهم که در اکثر تست‌ها مورد سوال قرار می‌گیرند را برایتان لیست می‌کنیم:

- $f'(x)\pm g'(x)=(f\pm g)'(x)$
- $f'(x)g(x)+g'(x)f(x)=(f.g)'(x)$
- $f'(x)g(x)-g'(x)f(x)=g^۲(x)(\frac{f}{g})'(x)\ ;\ (g(x)\neq ۰)$
- $\dfrac{f'(x)g(x)-g'(x)f(x)}{(g(x))^۲}=(\frac{f}{g})'(x)\ ;\ (g(x)\neq ۰)$
- $۲f(x)f'(x)=(f^۲(x))'$
- $f'(x)g'(f(x))=(gof)'(x)$

گروه آموزشی ماز

۷- تابع $f(x)=\begin{cases} x+\dfrac{۱}{x+۱} & x\le a \\ x^۲+b & x>a\end{cases}$ در $\mathbb{R}$ مشتق‌پذیر است. $a-b$ چقدر است؟

۱) ۱ ۲) ۱- ۳) $\frac{۱۷}{۴}$ ۴) $-\frac{۱۷}{۴}$

پاسخ: گزینه ۳ (سخت ـ محاسباتی ـ ۱۴۰۴)

تابع $f(x)=\begin{cases} x+\dfrac{۱}{x+۱} & x\le a \\ x^۲+b & x>a\end{cases}$ باید در $x=a$ مشتق‌پذیر باشد.

شرط پیوستگی: $a+\dfrac{۱}{a+۱}=a^۲+b$ (۱)

$$f'(x)=\begin{cases} ۱-\dfrac{۱}{(x+۱)^۲} & x\le a \\ ۲x & x>a\end{cases}\Rightarrow ۱-\frac{۱}{(a+۱)^۲}=۲a$$

$$\xrightarrow{\times(a+۱)^۲}(a+۱)^۲-۱=۲a(a+۱)^۲\Rightarrow a^۲+۲a=۲a^۳+۴a^۲+۲a$$

$$\Rightarrow ۲a^۳+۳a^۲=۰\Rightarrow a^۲(۲a+۳)=۰\Rightarrow\begin{cases} a=۰ & \text{غ ق ق} \\ a=-\dfrac{۳}{۲} & \checkmark\end{cases}$$

اگر $a=۰$ باشد، تابع f در $x=-۱$ تعریف نشده و مشتق‌ناپذیر است.

$$\xrightarrow{(1)} -\frac{۳}{۲}-۲=\frac{۹}{۴}+b \Rightarrow b=-\frac{۲۳}{۴} \Rightarrow a-b=-\frac{۳}{۲}+\frac{۲۳}{۴}=\frac{۱۷}{۴}$$

گروه آموزشی ماز

۸- تابع $f(x)=ax^۳-۳x^۲+b$ در $x=۱$ بر تابع $y=f''(x)$ مماس است. $f(-۱)$ چقدر است؟

۱) -۱۴ ۲) -۱۵ ۳) -۱۶ ۴) -۱۷

پاسخ: گزینه ۱ (سخت ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۲۰۴)

توابع f' و f'' را می‌نویسیم:

$$f(x)=ax^۳-۳x^۲+b \Rightarrow f'(x)=۳ax^۲-۶x \Rightarrow f''(x)=۶ax-۶$$

تابع f'' در $x=۱$ بر f مماس است، بنابراین:

$$\begin{cases} f'(۱)=۶a \Rightarrow ۳a-۶=۶a \Rightarrow a=-۲ \\ f(۱)=f''(۱) \Rightarrow a-۳+b=۶a-۶ \Rightarrow -۵+b=-۱۲-۶ \Rightarrow b=-۱۳ \end{cases}$$

خواهیم داشت:

$$f(x)=-۲x^۳-۳x^۲-۱۳ \Rightarrow f(-۱)=۲-۳-۱۳=-۱۴$$

گروه آموزشی ماز

۹- مجموع مقادیر اکسترمم مطلق تابع $f(x)=\frac{x^۳}{۳}-\frac{x^۲}{۲}-۲x$ در فاصلهٔ $[۰,۳]$ چقدر است؟

۱) $-\frac{۳}{۲}$ ۲) $-\frac{۱۰}{۳}$ ۳) $\frac{۱۰}{۳}$ ۴) $\frac{۳}{۲}$

پاسخ: گزینه ۲ (آسان ـ محاسباتی ـ ۱۲۰۵)

نقاط بحرانی تابع را در فاصلهٔ $[۰,۳]$ به دست می‌آوریم:

$$f(x)=\frac{x^۳}{۳}-\frac{x^۲}{۲}-۲x \Rightarrow f'(x)=x^۲-x-۲=۰ \Rightarrow \begin{cases} x=-۱ \text{ غ قق} \\ x=۲ \checkmark \end{cases}$$

نقاط بحرانی تابع $x=۰$، $x=۲$ و $x=۳$ می‌باشند.

خواهیم داشت:

$$\begin{cases} f(۰)=۰ \ \max \\ f(۲)=\frac{۸}{۳}-۲-۴=-\frac{۱۰}{۳} \ \min \\ f(۳)=۹-\frac{۹}{۲}-۶=-\frac{۳}{۲} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \min+\max=-\frac{۱۰}{۳}$$

مشتق‌پذیری روی یک بازه

الف) تابع f روی بازه (a,b) مشتق‌پذیر است، هرگاه در هر نقطه از این بازه پیوسته و مشتق‌پذیر باشد.

ب) تابع f روی بازه $[a,b)$ مشتق‌پذیر است، هرگاه:

۱. در بازه (a,b) پیوسته و مشتق‌پذیر باشد.

۲. در نقطه $x=a$ از راست پیوسته بوده و در این نقطه مشتق راست داشته باشد.

پ) تابع f روی بازه $(a,b]$ مشتق‌پذیر است، هرگاه:

۱. در بازه (a,b) پیوسته و مشتق‌پذیر باشد.

۲. در نقطه $x=b$ از چپ پیوسته بوده و در این نقطه مشتق چپ داشته باشد.

ت) تابع f روی بازه $[a,b]$ مشتق‌پذیر است، هرگاه:

۱. در بازه (a,b) پیوسته و مشتق‌پذیر باشد.

۲. در نقطه $x=a$ از راست پیوسته بوده و در این نقطه مشتق راست داشته باشد.

۳. در نقطه $x=b$ از چپ پیوسته بوده و در این نقطه مشتق چپ داشته باشد.

۱۰- حاصل‌ضرب مقادیر ماکزیمم نسبی تابع $f(x)=\dfrac{x^2}{1+x^4}$ کدام است؟

۱) صفر ۲) $\dfrac{1}{4}$ ۳) ۱ ۴) -1

پاسخ: گزینه ۲ (متوسط ـ محاسباتی ـ ۱۲۰۵)

آزمون مشتق اول:

$$f(x)=\frac{x^2}{x^4+1}\Rightarrow f'(x)=\frac{2x(x^4+1)-4x^3(x^2)}{(x^4+1)^2}=\frac{2x-2x^5}{(x^4+1)^2}=\frac{2x(1-x^4)}{(x^4+1)^2}$$

x		-1		0		1	
f'	+	0	−	0	+	0	−
f	↗	max	↘		↗	max	↘

خواهیم داشت:

$$f(-1)f(1)=(\frac{1}{2})(\frac{1}{2})=\frac{1}{4}$$

گروه آموزشی ماز

۱۱- محل تلاقی مجانب‌های تابع $f(x)=\dfrac{2x+1}{ax+1}$ بر نقطهٔ عطف تابع $g(x)=x^3+3ax^2+b$ واقع در ناحیهٔ چهارم محورهای مختصات منطبق است. کدام نقطه ماکزیمم نسبی تابع g می‌باشد؟

۱) $(0,0)$ ۲) $(2,-4)$ ۳) $(-2,0)$ ۴) $(-2,4)$

پاسخ: گزینه ۱ (سخت ـ محاسباتی ـ ۱۲۰۵)

$$\left.\begin{array}{l} \text{مجانب قائم تابع f}: x=-\dfrac{1}{a} \\ \text{مجانب افقی تابع f}: y=\dfrac{2}{a}\end{array}\right\}\Rightarrow \text{محل تلاقی مجانب‌های تابع f}:(-\frac{1}{a},\frac{2}{a})$$

$$g(x)=x^3+3ax^2+b\Rightarrow g'(x)=3x^2+6ax\Rightarrow g''(x)=6x+6a$$

$$g''=0\Rightarrow x=-a\ \text{طول نقطهٔ عطف}\Rightarrow y_{\text{عطف}}=-a^3+3a^3+b=2a^3+b$$

$$\text{نقطهٔ عطف}:(-a,2a^3+b)$$

خواهیم داشت:

$$-\frac{1}{a}=-a\Rightarrow a^2=1\xrightarrow{a<0}a=-1\ \text{(در ناحیهٔ چهارم طول نقطه مثبت است)}$$

$$2a^3+b=\frac{2}{a}\Rightarrow -2+b=-2\Rightarrow b=0$$

بنابراین:

$$g'(x)=3x^2-6x=0\Rightarrow\begin{cases}x=0\\x=2\end{cases}$$

$$g(0)=0$$

x		0		2	
g'	+	0	−	0	+
g	↗	max	↘		↗

در نتیجه نقطهٔ $(0,0)$ ماکزیمم نسبی تابع g می‌باشد.

گروه آموزشی ماز

۱۲- تابع $f(x)=\dfrac{x^4}{12}+\dfrac{2x^3}{3}+2ax^2+b$ مفروض است. اگر $f'(x)$ تنها یک نقطهٔ بحرانی داشته باشد، تابع f چند نقطهٔ بحرانی دارد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

پاسخ: گزینه ۲ (متوسط ـ محاسباتی ـ ۱۲۰۵)

توابع f' و f'' را به دست می‌آوریم:

$$f(x)=\frac{x^4}{12}+\frac{2x^3}{3}+2ax^2+b\Rightarrow f'(x)=\frac{x^3}{3}+2x^2+4ax\Rightarrow f''(x)=x^2+4x+4a$$

f' تنها یک نقطهٔ بحرانی دارد، بنابراین f'' فقط یک ریشه دارد.

$$\Delta_{f''}=0\Rightarrow 16-16a=0\Rightarrow a=1$$

خواهیم داشت:

$$f'(x)=\frac{x^3}{3}+2x^2+4x=x(\frac{x^2}{3}+2x+4)=0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = ۰ \\ \dfrac{x^۲}{۳} + ۲x + ۴ = ۰ \xrightarrow{\Delta<۰} \text{ریشه ندارد.} \end{cases}$$

در نتیجه $x = ۰$ تنها نقطهٔ بحرانی تابع f است.

گروه آموزشی ماز

۱۳- **کدام نقطه وسط پاره‌خطی است که نقاط مینیمم نسبی تابع $f(x) = x^۲(|x-۴|-۱)$ را به هم وصل می‌کند؟**

۱) $(۱,۲)$ ۲) $(۲,۴)$ ۳) $(۲,-۸)$ ۴) $(۳,-۶)$

پاسخ: گزینه ۳ **(سخت ـ محاسباتی ـ ۱۲۰۵)**

تابع f را به صورت دو ضابطه‌ای نوشته، مشتق آن را به دست می‌آوریم:

$$f(x) = \begin{cases} x^۳ - ۵x^۲ & x \geq ۴ \\ -x^۳ + ۳x^۲ & x < ۴ \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} ۳x^۲ - ۱۰x & x > ۴ \\ -۳x^۲ + ۶x & x < ۴ \end{cases}$$

خواهیم داشت:

$$f'(x) = ۰ \begin{cases} \xrightarrow{x>۴} ۳x^۲ - ۱۰x = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = ۰ \text{ غ ق ق} \\ x = \dfrac{۱۰}{۳} \text{ غ ق ق} \end{cases} \\ \xrightarrow{x<۴} -۳x^۲ + ۶x = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = ۰ \checkmark \\ x = ۲ \checkmark \end{cases} \end{cases}$$

آزمون مشتق اول:

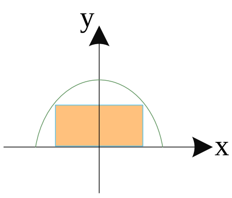
x		۰		۲		۴	
f′	−		+		−		+
f	↘		↗		↘		↗

$$\Rightarrow \text{نقاط مینیمم نسبی} \Rightarrow \begin{cases} A(۰,۰) \\ B(۴,-۱۶) \end{cases}$$

نقطهٔ $M(۲,-۸)$ وسط AB است.

گروه آموزشی ماز

۱۴- **مطابق شکل، یک مستطیل در یک نیم‌دایره به شعاع $\sqrt{۱۰}$ محاط شده است. اگر مستطیل بیشترین مساحت ممکن را داشته باشد، محیط آن چقدر است؟**

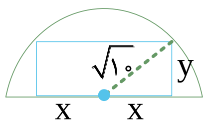


۱) $۳\sqrt{۵}$
۲) $۴\sqrt{۵}$
۳) $۵\sqrt{۵}$
۴) $۶\sqrt{۵}$

پاسخ: گزینه ۴ **(متوسط ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۲۰۵)**

روش اول:

با توجه به شکل داریم:



می‌دانیم:

$$x^۲ + y^۲ = ۱۰ \Rightarrow y = \sqrt{۱۰ - x^۲}$$

$$S_{\text{مستطیل}} = ۲xy = ۲x\sqrt{۱۰ - x^۲}$$

$$\Rightarrow S' = ۲(\sqrt{۱۰ - x^۲} - \frac{x^۲}{\sqrt{۱۰ - x^۲}}) = ۰ \Rightarrow \frac{۱۰ - ۲x^۲}{\sqrt{۱۰ - x^۲}} = ۰ \Rightarrow x^۲ = ۵ \Rightarrow x = \sqrt{۵} \Rightarrow y = \sqrt{۵}$$

خواهیم داشت:

$$\text{محیط} = ۴x + ۲y = ۶\sqrt{۵}$$

روش دوم:

می‌دانیم $x^۲ + y^۲ = ۱۰$ است، بنابراین بیشترین مقدار $x^۲y^۲$ زمانی است که $x^۲ = y^۲ = ۵$ باشد، در نتیجه بیشترین مقدار xy نیز در همین حالت رخ می‌دهد، یعنی $x = y = \sqrt{۵}$.

$$\text{محیط} = ۴x + ۲y = ۶\sqrt{۵}$$

بهینه‌سازی

به محاسبه اکسترمم‌های مطلق یک تابع در صنعت، پزشکی، مهندسی و ... بهینه‌سازی می‌گویند.

در مسئله‌های بهینه‌سازی معمولاً یافتن دامنه متغیر بر عهده خود ماست.

مسئله‌های بهینه‌سازی ۳ حالت کلی دارند:

الف) یک متغیره که فرمول مسئله را داده‌اند.

ب) یک متغیره که فرمول مسئله را نداده‌اند و باید خودمان بیابیم.

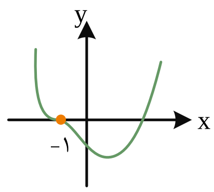
ج) دو یا چند متغیره که ابتدا باید آن را به یک متغیره تبدیل کنیم.

نکته ۱: اگر جمع دو عدد مثبت ثابت باشد، ضرب آن‌ها موقعی ماکزیمم است که برابر باشند.

نکته ۲: اگر ضرب دو عدد مثبت ثابت باشد، جمع آن‌ها موقعی مینیمم است که برابر باشند.

گروه آموزشی ماز

۱۵- نمودار تابع $f(x)=|x+a|(x^۲-b)$ به صورت مقابل است. طول نقطهٔ مینیمم نسبی تابع چقدر است؟



۱) ۱

۲) $\frac{۱}{۲}$

۳) $\frac{۱}{۳}$

۴) $\frac{۱}{۴}$

پاسخ: گزینه ۳ (سخت ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۲۰۵)

مقدار تابع و مقدار مشتق تابع در $x=-۱$ برابر صفر است، بنابراین $x=-۱$ ریشهٔ غیر سادهٔ تابع f می‌باشد، یعنی به ازای $x=-۱$ هم عبارت $x+a$ و هم عبارت $x^۲-b$ صفر می‌شود، در نتیجه: $a=۱\ ,\ b=۱$

خواهیم داشت:

$$f(x)=|x+۱|(x^۲-۱)\xrightarrow{x>-۱}f(x)=(x+۱)(x^۲-۱)=x^۳+x^۲-x-۱$$

$$\Rightarrow f'(x)=۳x^۲+۲x-۱=۰\Rightarrow\begin{cases}x=-۱ & \text{غ ق ق}\\ x=\frac{۱}{۳} & \checkmark\end{cases}$$

گروه آموزشی ماز

۱۶- اگر $A=\begin{bmatrix}۱ & -۳\\ ۱ & ۱\end{bmatrix}$، آن‌گاه درایه سطر دوم و ستون دوم ماتریس $A^{۱۰۰}$ چقدر است؟

۱) $-۲^{۱۰۰}$ ۲) $۲^{۱۰۰}$ ۳) $۲^{۹۹}$ ۴) $-۲^{۹۹}$

پاسخ: گزینه ۴ (متوسط ـ محاسباتی ـ ۱۲۰۱)

$$A^۲=\begin{bmatrix}۱ & -۳\\ ۱ & ۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱ & -۳\\ ۱ & ۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-۲ & -۶\\ ۲ & -۲\end{bmatrix}$$

$$A^۳=A^۲\times A=(-۲)\begin{bmatrix}۱ & ۳\\ -۱ & ۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱ & -۳\\ ۱ & ۱\end{bmatrix}=(-۲)\begin{bmatrix}۴ & ۰\\ ۰ & ۴\end{bmatrix}=-۸I$$

$$\Rightarrow A^{۱۰۰}=A^{۹۹}\times A=(A^۳)^{۳۳}\times A=(-۸I)^{۳۳}\times A$$

$$\Rightarrow A^{۱۰۰}=-(۲^۳)^{۳۳}A=-۲^{۹۹}A\Rightarrow \text{درایه سطر دوم، ستون دوم}=-۲^{۹۹}\times۱$$

توجه فرمایید!!!

هر آرایش از اعداد حقیقی به صورت مقابل یک ماتریس $n\times m$ است:

$$A=\begin{bmatrix}a_{۱۱} & \cdots & a_{۱m}\\ \vdots & & \vdots\\ a_{n۱} & \cdots & a_{nm}\end{bmatrix}$$

a_{ij} ها را اعضای ماتریس یا درایه‌های ماتریس می‌نامیم.

$$A^n=A.A^{n-۱}=A^{n-۱}.A$$

۱۷- اگر $A=\begin{bmatrix}۱ & ۲\\ x & ۴\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}-y-۱ & ۲\\ y & -۱\end{bmatrix}$ و AB یک ماتریس اسکالر غیرصفر باشد، x+y چقدر است؟

۱) ۶ ۲) ۵ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ: گزینه ۱ (متوسط ـ محاسباتی ـ ۱۴۰۱)

$$A\times B=\begin{bmatrix}۱ & ۲\\ x & ۴\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-y-۱ & ۲\\ y & -۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}y-۱ & ۰\\ -xy-x+۴y & ۲x-۴\end{bmatrix}$$

AB یک ماتریس اسکالر است. بنابراین باید درایه‌های غیرواقع بر قطر اصلی صفر باشند ولی درایه‌های قطر اصلی با هم برابر باشند.

$$\begin{cases}y-۱=۲x-۴\Rightarrow y=۲x-۳\\ -xy-x+۴y=۰\Rightarrow y(-x+۴)=x\Rightarrow y=\dfrac{x}{۴-x}\end{cases}\Rightarrow\frac{x}{۴-x}=۲x-۳\Rightarrow x=۸x-۱۲-۲x^۲+۳x$$

$$\Rightarrow ۲x^۲-۱۰x+۱۲=۰\Rightarrow x^۲-۵x+۶=۰\Rightarrow(x-۲)(x-۳)=۰\Rightarrow x=۲ \text{ یا } x=۳$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x=۲\Rightarrow y=۱\Rightarrow AB=\bar{O}\\ x=۳\Rightarrow y=۳\Rightarrow x+y=۶\end{cases}$$

ضرب دو ماتریس:

اگر $A_{m\times l}$ و $B_{k\times n}$ باشد، در صورتی $A\times B$ تعریف می‌شود که k و l با هم برابر باشند، به عبارتی ضرب دو ماتریس زمانی وجود دارد که تعداد ستون‌های ماتریس اول و تعداد سطرهای ماتریس دوم برابر باشند.

برای ضرب دو ماتریس، از ماتریس اول، سطر و از ماتریس دوم، ستون بر می‌داریم و درایه‌های هر سطر در ستون به صورت نظیر به نظیر ضرب و حاصل با هم جمع می‌شود و در ماتریس حاصل‌ضرب جایگزین می‌شود.

گروه آموزشی ماز

۱۸- اگر $A=\begin{bmatrix}۲ & ۱\\ ۱ & ۱\end{bmatrix}$ و $A^{-۱}+\frac{۱}{۲}B^{-۱}=I$، آن‌گاه حاصل‌ضرب درایه‌های غیرواقع بر قطر اصلی ماتریس B چقدر است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۱}{۴}$ ۳) $\frac{۱}{۳}$ ۴) $\frac{۱}{۶}$

پاسخ: گزینه ۲ (آسان ـ محاسباتی ـ ۱۴۰۱)

$$A=\begin{bmatrix}۲ & ۱\\ ۱ & ۱\end{bmatrix}\Rightarrow A^{-۱}=\frac{۱}{۲-۱}\begin{bmatrix}۱ & -۱\\ -۱ & ۲\end{bmatrix}\Rightarrow\frac{۱}{۲}B^{-۱}=I-A^{-۱}=\begin{bmatrix}۱ & ۰\\ ۰ & ۱\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}۱ & -۱\\ -۱ & ۲\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۰ & ۱\\ ۱ & -۱\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow B^{-۱}=\begin{bmatrix}۰ & ۲\\ ۲ & -۲\end{bmatrix}\Rightarrow B=\frac{۱}{-۴}\begin{bmatrix}-۲ & -۲\\ -۲ & ۰\end{bmatrix}\Rightarrow B=\begin{bmatrix}\frac{۱}{۲} & \frac{۱}{۲}\\ \frac{۱}{۲} & ۰\end{bmatrix}$$

حاصل‌ضرب درایه‌های قطر فرعی $=\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}=\frac{۱}{۴}$

وارون ماتریس:

ماتریس مربعی B را وارون ماتریس مربعی A می‌گوییم، هرگاه حاصل‌ضرب دو ماتریس A و B برابر I شود، یعنی $B=A^{-۱}$ و $AB=BA=I$ است.

- وارون هر ماتریس مربعی، در صورت وجود، منحصر به فرد است.
- وارون ماتریس مربعی ۲×۲ را می‌توان اینگونه به دست آورید:

$$A=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}\Rightarrow A^{-۱}=\frac{۱}{ad-bc}\begin{bmatrix}d & -b\\ -c & a\end{bmatrix}$$

گروه آموزشی ماز

۱۹- اگر $AM+MB=\frac{1}{6}AB$ و $MB^{-1}-A^{-1}M=\frac{5}{3}I$، آن‌گاه ماتریس MB^{-1} کدام است؟

۱) $\frac{3}{4}I$ ۲) $\frac{7}{8}I$ ۳) $\frac{11}{12}I$ ۴) $\frac{15}{16}I$

پاسخ: گزینه ۳ (متوسط ـ محاسباتی ـ ۱۴۰۱)

$$AM+MB=\frac{1}{6}AB \xrightarrow{\text{از چپ } \times A^{-1}} M+A^{-1}MB=\frac{1}{6}B$$

$$\xrightarrow{\text{از راست } \times B^{-1}} MB^{-1}+A^{-1}M=\frac{1}{6}I$$

$$\left.\begin{array}{l} MB^{-1}-A^{-1}M=\frac{5}{3}I \\ MB^{-1}+A^{-1}M=\frac{1}{6}I \end{array}\right\} \Rightarrow 2MB^{-1}=(\frac{1}{6}+\frac{5}{3})I=\frac{11}{6}I \Rightarrow MB^{-1}=\frac{11}{12}I$$

گروه آموزشی ماز

۲۰- اگر $3A+A\times\begin{bmatrix}1 & 2\\ 1 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 4\\ 3 & 2\end{bmatrix}$، آن‌گاه مجموع درایه‌های ماتریس A چقدر است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ: گزینه ۲ (متوسط ـ محاسباتی ـ ۱۴۰۱)

$$3A+A\begin{bmatrix}2 & 1\\ -1 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4 & 1\\ 2 & 3\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A(3I+\begin{bmatrix}2 & 1\\ -1 & 1\end{bmatrix})=\begin{bmatrix}4 & 1\\ 2 & 3\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A\times\begin{bmatrix}5 & 1\\ -1 & 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4 & 1\\ 2 & 3\end{bmatrix} \Rightarrow A=\begin{bmatrix}4 & 1\\ 2 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5 & 1\\ -1 & 4\end{bmatrix}^{-1}$$

$$\Rightarrow A=\begin{bmatrix}4 & 1\\ 2 & 3\end{bmatrix}\times\frac{1}{21}\begin{bmatrix}4 & -1\\ 1 & 5\end{bmatrix}=\frac{1}{21}\begin{bmatrix}17 & 1\\ 11 & 13\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \text{مجموع درایه‌های } A=\frac{1}{21}(17+1+11+13)=\frac{42}{21}=2$$

گروه آموزشی ماز

۲۱- اگر $A=\begin{bmatrix}3 & -2|A| & -8\\ 1 & -|A| & -4\\ 2 & 5 & |A|\end{bmatrix}$، آن‌گاه کمترین مقدار $|A|$ چقدر است؟

۱) ۱- ۲) ۲- ۳) ۳- ۴) ۴-

پاسخ: گزینه ۴ (متوسط ـ محاسباتی ـ ۱۴۰۱)

از طرفین تساوی $A=\begin{bmatrix}-8 & -2|A| & 3\\ -4 & -|A| & 1\\ |A| & 5 & 2\end{bmatrix}$ دترمینان می‌گیریم:

$$\Rightarrow |A|=\begin{vmatrix}-8 & -2|A| & 3\\ -4 & -|A| & 1\\ |A| & 5 & 2\end{vmatrix} \overset{R_1-2R_2}{=} \begin{vmatrix}0 & 0 & 1\\ -4 & -|A| & 1\\ |A| & 5 & 2\end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow |A|=-20+|A|^2=|A|^2-|A|-20=0 \Rightarrow (|A|-5)(|A|+4)=0$$

$$\Rightarrow |A|=5 \text{ یا } |A|=-4$$

دترمینان:

به هر ماتریس مربعی مانند A، عددی حقیقی نسبت داده می‌شود که به آن دترمینان ماتریس A می‌گویند و با $|A|$ نمایش می‌دهند.

$$A=[k]_{۱\times۱}\Rightarrow |A|=k \qquad A=\begin{bmatrix} a & b\\ c & d\end{bmatrix}\Rightarrow |A|=ad-bc$$

دترمینان ماتریس ۳×۳ را می‌توان به دو روش به دست آورد:

۱) **بسط:** می‌توان ماتریس را حول یک سطر یا ستون بسط داد.

$$\begin{vmatrix} a & b & c\\ d & e & f\\ g & h & i\end{vmatrix}\xrightarrow{\text{بسط حول سطر اول}} a\begin{vmatrix} e & f\\ h & i\end{vmatrix}-b\begin{vmatrix} d & f\\ g & i\end{vmatrix}+c\begin{vmatrix} d & e\\ g & h\end{vmatrix}$$

۲) **قاعده ساروس:** ابتدا دو ستون اول را در سمت راست ماتریس بازنویسی می‌کنیم، سپس مجموع حاصل‌ضرب درایه‌های قطر فرعی و دو قطر موازی با آن را از مجموع حاصل‌ضرب درایه‌های قطر اصلی و دو قطر موازی آن کم می‌کنیم.

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} a & b & c & a & b\\ d & e & f & d & e\\ g & h & i & g & h\end{array}\right. =(aei+bfg+cdh)-(ceg+afh+bdi)$$

گروه آموزشی ماز

۲۲- اگر در ماتریس **A**، درایه سطر دوم ستون سوم را ۶ برابر کنیم، باید درایه سطر دوم، ستون اول را چند برابر کنیم تا دترمینان ماتریس ساخته شده با دترمینان ماتریس **A** برابر باشد؟

$$A=\begin{bmatrix} ۲ & ۱ & ۳\\ ۳ & ۲ & ۱\\ ۱ & ۳ & ۲\end{bmatrix}$$

۱) $\frac{۴۴}{۲۱}$ ۲) $\frac{۴۶}{۲۱}$ ۳) $\frac{۴۸}{۲۱}$ ۴) $\frac{۵۰}{۲۱}$

پاسخ: گزینه ۲ (سخت ـ محاسباتی ـ ۱۴۰۱)

تغییرات دترمینان فقط به میزان تغییر درایه و همسازه نظیر آن درایه در بسط وابسته است.

$$|B|=\begin{vmatrix} ۲ & ۱ & ۳\\ ۳m & ۲ & ۶\\ ۱ & ۳ & ۲\end{vmatrix},\ |B|=|A|\Rightarrow |B|-|A|=۰$$

$$\Rightarrow (۳m-۳)\times(-۱)^{۲+۱}\begin{vmatrix} ۱ & ۳\\ ۳ & ۲\end{vmatrix}+(۶-۱)\times(-۱)^{۲+۳}\begin{vmatrix} ۲ & ۱\\ ۱ & ۳\end{vmatrix}=۰$$

$$\Rightarrow ۷(۳m-۳)-۲۵=۰\Rightarrow ۳m-۳=\frac{۲۵}{۷}\Rightarrow ۳m=\frac{۴۶}{۷}\Rightarrow m=\frac{۴۶}{۲۱}$$

ماتریس مربعی!

برای ماتریس مربعی A، ماتریسی را که از حذف سطر i ام و ستون j ام به دست می‌آید با M_{ij} نشان می‌دهیم.

برای ماتریس مربعی A به $A_{ij}=(-۱)^{i+j}|M_{ij}|$ همسازه نظیر درایه a_{ij} می‌گوییم.

گروه آموزشی ماز

۲۳- اگر $|B|=۴$ و $|B+۲I|=-\frac{۳}{۲}$، آن‌گاه دترمینان ماتریس $AB^۲A^{-۱}+۲ABA^{-۱}$ چقدر است؟

۱) -۱ ۲) -۲ ۳) -۳ ۴) -۶

پاسخ: گزینه ۴ (سخت ـ محاسباتی ـ ۱۴۰۱)

$$|AB^۲A^{-۱}+۲ABA^{-۱}|=|A(B^۲+۲B)A^{-۱}|=|A|\times|B^۲+۲B|\times|A^{-۱}|=|B^۲+۲B|$$

$$=|B(B+۲I)|=|B|\times|B+۲I|=۴\times\frac{-۳}{۲}=-۶$$

گروه آموزشی ماز

۲۴- گراف G دو رأس از درجه ۶، یک رأس از درجه ۳، دو رأس از درجه ۲ و دو رأس دیگر از درجات a و b دارد. حداکثر اندازه این گراف چقدر است؟

۱) ۱۲ ۲) ۱۳ ۳) ۱۴ ۴) ۱۵

پاسخ: گزینه ۲ (سخت ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۴۰۲)

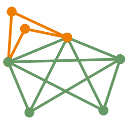
گراف از مرتبه ۷ است. پس رئوس درجه ۶ فول هستند. چون دو رأس فول داریم، پس δ نمی‌تواند از ۲ کوچک‌تر باشد، از طرفی حالا که تا اینجای کار، رأس درجه ۲ داریم، یعنی رأس فول دیگری نمی‌توانیم داشته باشیم،پس a و b نهایتاً می‌توانند ۵ باشند. از طرفی غیر از a و b، گراف تنها یک رأس فرد دارد، پس از a و b یکی باید زوج و یکی باید فرد باشد، چون هدف بیشترین اندازه ممکن است، حداکثر مقادیر را برای a و b بر می‌گزینیم یعنی ۴ و ۵:

دنباله درجات: ۶,۶,۵,۴,۳,۲,۲

اما آیا این گراف وجود دارد؟ پاسخ منفی است. با الگوریتم هاول- حکیمی می‌توانید متوجه این موضوع بشوید. البته الگوریتم هاول خارج از کتاب است اما بیشتر سوال‌های گراف کنکور به الگوریتم هاول ربط دارد. ضمن اینکه برای این مسأله می‌توان به طور کلی راه‌حلی جبری با الگوریتم هاول- حکیمی ارائه داد.

حال که نمی‌توانیم از ۵ و ۴ استفاده کنیم، از ۴ و ۳ استفاده می‌کنیم (از ۵ و ۲ هم می‌شود استفاده کرد و بررسی کرد).

دنباله درجات: ۶,۶,۴,۳,۳,۲,۲


(الف)

می‌توان با الگوریتم هاول- حکیمی نشان داد گراف بالا وجود دارد یا مانند شکل (الف) رسم کرد.

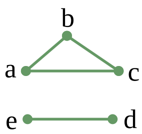
$$۲q = \sum \deg V \Rightarrow ۲(۶+۳+۲)+۴ = ۲q \Rightarrow q = ۶+۳+۲+۲ = ۱۳$$

گراف:

- نموداری است که از دو مجموعه تشکیل شده است یک مجموعه، نقاط و مجموعه‌های دیگر پاره‌خط‌هایی که این نقاط را به هم وصل می‌کنند.
- هر نقطه را رأس می‌نامیم و مجموعه رأس‌ها را با $V(G)$ و هر پاره‌خط را یال نامیده و مجموعه یال‌ها را با $E(G)$ نمایش می‌دهیم.
- به تعداد رئوس یک گراف، مرتبه یک گراف گفته می‌شود و با p نشان می‌دهیم.
- به تعداد یال‌های یک گراف، اندازه یک گراف گفته می‌شود و با q نشان می‌دهیم.
- درجه رأس V در گراف G برابر است با تعداد یال‌هایی از گراف G که به رأس V متصل هستند.
- بزرگ‌ترین عدد در بین درجه رئوس گراف G را با $\Delta(G)$ و کوچک‌ترین آن‌ها را با $\delta(G)$ نمایش می‌دهیم.

گروه آموزشی ماز

۲۵- گراف زیر چند زیرگراف مرتبه ۴ دارد؟



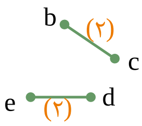
۱) ۲۶
۲) ۲۸
۳) ۳۰
۴) ۳۲

پاسخ: گزینه ۲ (متوسط ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۴۰۲)

چون زیرگراف‌های مرتبه ۴، مطلوب است باید از ۵ رأس گراف، هر بار ۴ رأس را انتخاب کنیم.

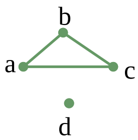
از طرفی، ۳ رأس a، b، c، شرایط مشابهی دارند، پس کافی است تعداد حالاتی که رأس a حضور ندارد را شمرده و در ۳ ضرب کنیم، شرایط e و d نیز مشابه است، پس تعداد گراف‌هایی که رأس e حضور ندارد را شمرده در ۲ ضرب می‌کنیم.

گروه (الف): a را کنار می‌گذاریم.



$۴ = ۲^۲ =$ تعداد زیرگراف‌ها

گروه (ب): e را کنار می‌گذاریم.



$۸ = ۲^۳ =$ تعداد زیر گراف‌ها

بنابراین: $۲۸ = ۱۲+۱۶ = ۳\times۴+۲\times۸ =$ تعداد کل زیرگراف‌های مرتبه ۴

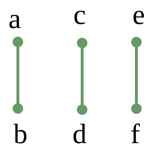
زیرگراف

یک زیرگراف از گراف G، گرافی است که مجموعه رئوس آن، زیرمجموعه غیرتهی از مجموعه رئوس گراف G و مجموعه یال‌های آن، زیرمجموعه‌ای از مجموعه یال‌های گراف G باشد.

- هر گراف، زیرگراف خودش است.

گروه آموزشی ماز

۲۶- مکمل گراف زیر، چند دور به طول ۳ دارد؟



۱) ۲

۲) ۶

۳) ۸

۴) ۱۰

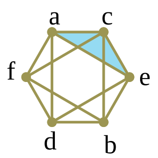
پاسخ: گزینه ۳ (سخت ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۴۰۲)

روش اول:

گراف مرتبه ۶ است. از طرفی می‌دانیم:

$$\deg_G^a + \deg_{\overline{G}}^a = p-1 \Rightarrow 1+\deg_{\overline{G}}^a = 6-1 \Rightarrow \deg_{\overline{G}}^a = 4$$

البته گراف $\overline{G}$ نیز منتظم است، زیرا درجه همهٔ رأس‌هایش ۴ است. گراف ۴- منتظم مرتبه ۶، گراف مهمی است. در متن کتاب رسم آن خواسته شده است. از طرفی، در کنکور ۹۸ هم تعداد دورهای به طول ۴ آن پرسیده شده است. بخش مهمی از حل رسم درست گراف است. برای رسم مکمل گراف داده شده کافی است از گراف کامل این ۳ یال را حذف کنیم. (یال‌های ef, cd, ab) گراف‌هایی که به‌دست می‌آید همگی یکریخت (هم‌نوع) هستند، ساده‌ترین روشی که می‌شود همین یک نوع گراف را رسم کرد به صورت زیر است:



تعداد دورهای به طول ۳ $= 2+6 = 8$

زیرا ۶ تا دور به طول ۳ شبیه acea داریم و دو مثلث بزرگ هم داریم: cbfc و aeda

روش دوم:

گراف k_6، $\binom{6}{3}=20$ دور به طول ۳ دارد. در این گراف هر یال دقیقاً در ۴ دور به طول ۳ ظاهر می‌شود. حذف هر یال باعث از بین رفتن هر ۴ دور به طول ۳ای می‌شود که آن یال در آن نقش بازی می‌کرده، در نتیجه با حذف این ۳ یال (که به رئوس متمایزی وصل هستند)، $3\times 4=12$ دور به طول ۳ حذف می‌شود و در نتیجه $20-12=8$ دور به طول ۳ خواهیم داشت.

مکمل گراف

مکمل گراف G که آن را با $\overline{G}$ نشان می‌دهیم، گرافی است که مجموعه رأس‌های آن همان مجموعه رأس‌های G است و دو رأس در $\overline{G}$ مجاورند، اگر و تنها اگر در G مجاور نباشند.

مسیر در گراف:

دنباله‌ای از رئوس و یال است که یال و رأس تکراری ندارند.

- تعداد یال‌های موجود در مسیر را طول مسیر می‌نامند که همواره یکی کمتر از تعداد رأس‌های موجود در مسیر می‌باشد.

دور در گراف:

مسیری که ابتدا و انتهایش یک رأس از گراف باشد، دور نامیده می‌شود. پس دور همانند مسیر است با این تفاوت که رأس ابتدا و انتهای آن یکسان است.

- تعداد یال‌های موجود در دور را طول دور می‌نامند که همواره برابر تعداد رأس‌های موجود در دور است.

گروه آموزشی ماز

۲۷- گراف G از مرتبه ۱۰ و همبند است. هر یالی از G را بخواهیم حذف کنیم، گراف ناهمبند می‌شود. اگر در این گراف $\Delta = ۲$، آن‌گاه گراف G، چند مسیر به طول ۳ دارد؟

۱) ۷ ۲) ۶ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ: گزینه ۱ (آسان ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۴۰۲)

گراف G همبند است، پس حداقل $P-۱$ یال دارد، یعنی حداقل ۹ یال دارد. اتفاقاً همین ۹ تا را دارد نه بیشتر، زیرا به هیچ کدام از یال‌ها هم نمی‌توانیم دست بزنیم و هر کدام را اگر حذف کنیم، گراف ناهمبند می‌شود، پس اندازه گراف باید در مرز همبندی یعنی $P-۱$ باشد.

از طرفی $\Delta = ۲$، پس $\delta = ۱$، زیرا اگر $\delta = ۲$، آن‌گاه گراف حداقل ۱۰ یال خواهد داشت و اگر $\delta = ۰$، آن‌گاه گراف ناهمبند خواهد بود.

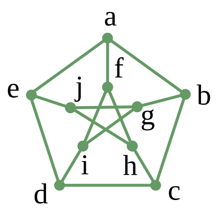
گراف همبندی از مرتبه ۱۰ و اندازه ۹ که $\Delta = ۲$ و $\delta = ۱$، فقط یک نوع (ریخت) دارد، گراف $P_{۱۰}$. این گراف هم $۱۰-۳=۷$، مسیر به طول ۳ دارد.

همبندی و ناهمبندی یک گراف

یک گراف را همبند می‌گوییم هرگاه بین هر دو رأس آن حداقل یک مسیر وجود داشته باشد، در غیر این صورت آن گراف را ناهمبند می‌نامیم.

گروه آموزشی ماز

۲۸- در گراف زیرمجموعه $\{a,d,x,y\}$ یک مجموعه احاطه‌گر مینیمال است. $\{x,y\}$ با کدام مجموعه مساوی است؟



۱) $\{j,f\}$
۲) $\{e,h\}$
۳) $\{g,h\}$
۴) $\{e,b\}$

پاسخ: گزینه ۳ (آسان ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۴۰۲)

مجموعه $A=\{a,d,g,h\}$ هم همه رأس‌ها را احاطه می‌کند، هم مینیمال است، زیرا هر کدام از رأس‌ها حذف شود، دیگر مجموعه باقی‌مانده، احاطه‌گر نیست، جالب اینجا است چون اعضای مجموعه A دوبه‌دو غیرمجاورند، پس اگر مجموعه A احاطه‌گر است، قطعاً مینیمال نیز است و این یک حکم کلی زیبا است که «اگر در یک مجموعه احاطه‌گر، هیچ دو عضوی با هم مجاور نباشند، قطعاً مجموعه مینیمال است»

البته واضح است برعکس این گزاره لزوماً درست نیست، یعنی نمی‌توان ادعا کرد که در مجموعه‌های احاطه‌گر مینیمال، رأس‌ها دوبه‌دو غیرمجاورند.

تعدادی نکته طلایی

- در هر گراف، یافتن رئوسی از مجموعه رئوس گراف که با تمام رئوس دیگر گراف مجاور باشند و یا به عبارت دیگر همه رئوس را احاطه کنند، احاطه‌گری در گراف گفته می‌شود.
- در بین تمام مجموعه‌های احاطه‌گر گراف G، مجموعه یا مجموعه‌های احاطه‌گری که کمترین تعداد عضو را دارند، مجموعه احاطه‌گر مینیم و تعداد اعضای چنین مجموعه‌هایی را عدد احاطه‌گری گراف G می‌نامیم و آن را با $\gamma(G)$ نمایش می‌دهیم.
- یک مجموعه احاطه‌گر را که با حذف هر یک از رئوس دیگر احاطه‌گر نباشد، احاطه‌گر مینیمال می‌نامند.

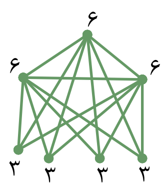
گروه آموزشی ماز

۲۹- گراف G از مرتبه ۷، دقیقاً ۳ مجموعه احاطه‌گر مینیمم دارد. اگر در این گراف $\gamma = ۱$، آن‌گاه گراف حداقل چند یال دارد؟

۱) ۱۱ ۲) ۱۳ ۳) ۱۵ ۴) ۱۷

پاسخ: گزینه ۳ (متوسط ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۴۰۲)

چون $\gamma = ۱$، پس از این گراف رأس فول (رأس از درجه $P-۱$) وجود دارد. از طرفی، گراف ۳ تا $\delta-$مجموعه دارد، پس سه رأس فول یعنی سه رأس درجه ۶ دارد. حداقل اندازه گرافی با این شرایط برابر ۱۵ است.



دنباله درجات $= ۶,۶,۶,۳,۳,۳,۳$

$$\sum \deg V_i = ۲q \Rightarrow ۳\times۶+۴\times۳=۲q \Rightarrow q=\frac{۳\times۶}{۲}+\frac{۴\times۳}{۲}=۹+۶=۱۵$$

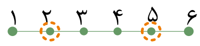
گروه آموزشی ماز

۳۰- گراف $P_۶$ چند مجموعه احاطه‌گر مینیمال دارد؟

۱) ۶   ۲) ۷   ۳) ۸   ۴) ۹

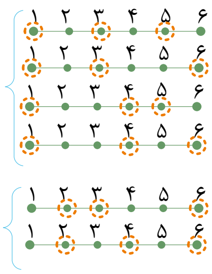
پاسخ: گزینه ۲   (متوسط ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۴۰۲)

روش اول: $P_۶$، $\gamma = ۲$ و گراف مجموعه احاطه‌گر مینیمم یکتا دارد.



تنها γ−مجموعه گراف، مجموعه $\{۲,۵\}$ است. اما گراف می‌تواند مجموعه احاطه‌گر مینیمال غیرمینیمم هم داشته باشد. این مجموعه‌ها نیز حداکثر ۳ عضوی هستند. این مجموعه‌ها یا شامل ۱ هستند و یا شامل ۲.

در شکل زیر، ۶ مجموعه احاطه‌گر مینیمال ۳ عضوی مشخص شده است.



پس تعداد کل مجموعه‌های احاطه‌گر مینیمال برابر است با: $۶+۱=۷$

برای شمردن تعداد مجموعه احاطه‌گر مینیمال ۳ عضوی روش‌های متنوع و زیبایی وجود دارد. روش بالا یک روش شهودی و سعی و خطایی و قابل فهم در زمانی کوتاه است، از سمت چپ انتخاب رأس‌ها را شروع می‌کنیم، بالاخره یکی از دو رأس ۱ و ۲ باید در مجموعه حضور داشته باشند، ابتدا رأس ۱ را برمی‌داریم و رأس مجاورش که نه، ۳ را برمی‌داریم و الی آخر هر چند حالت که امکان‌پذیر بود را رسم می‌کنیم و به عنوان جواب به حساب می‌آوریم. وقتی تمام حالات با حضور رأس ۱ را شمردیم، می‌رویم سراغ آن‌هایی که رأس ۱ را ندارند، پس مجبور هستند ۲ را داشته باشند.

برای شمارش تعداد احاطه‌گر مینیمم و مینیمال می‌توانید از این روش استفاده کنید، اما روش‌های جذاب دیگری وجود دارد که در اینجا مجال پرداختن به آن‌ها نیست. به طور خلاصه به ۲ تا از آن‌ها اشاره می‌کنیم.

روش دوم: $x_۱+x_۲+x_۳+x_۴=۳$ را با شرط‌های $۱\le x_۱\le ۰$ و $۲\le x_۲\le ۱$ و $۲\le x_۳\le ۱$ و $۱\le x_۴\le ۰$ حل کنیم.

روش سوم: تمام احاطه‌گرهای ۳ عضوی را یافته، غیرمینیمال‌ها را حذف می‌کنیم:

$$\text{تمام احاطه‌گرها} = \binom{۶}{۳} - ۴ - ۲\times ۳ = ۱۰$$

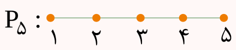
احاطه‌گرهای غیرمینیمال آن‌هایی هستند که شامل مجموعه احاطه‌گر مینیمم یعنی شامل ۲ و ۵ هستند.

مجموعه‌های ۳عضوی شامل ۲ و ۵، ۴ تا هستند، زیرا عضو سوم به $\binom{۴}{۱}$ طریق انتخاب می‌شود.

بنابراین: تعداد مجموعه‌های احاطه‌گر مینیمال ۳ عضوی $= ۱۰-۴ = ۶$

گراف P_n:

گراف‌هایی را که در آن‌ها یال‌ها مانند واگن‌های قطار به دنبال هم رسم شده‌اند با P_n نمایش می‌دهیم.



گروه آموزشی ماز